Lycée Ali Belhwen Béja

****

BAC BLANC

****

2015/2016

SECTION : 4 sciences de l'informatique 2

****

EPREUVE : MATHEMATHIQUES

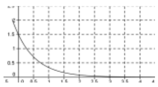
****

DUREE : 3heures

Exercice n°1 :

Les parties I et II sont indépendantes.

I/ Soit une variable aléatoire continue X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .
La courbe ci-dessous représente la fonction densité f associée :



1. Interpréter graphiquement la probabilité $p(X \le 1)$.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

3. On pose $\lambda = 1{,}5$ et on suppose que X est la durée de vie d'une voiture.

  a. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie .

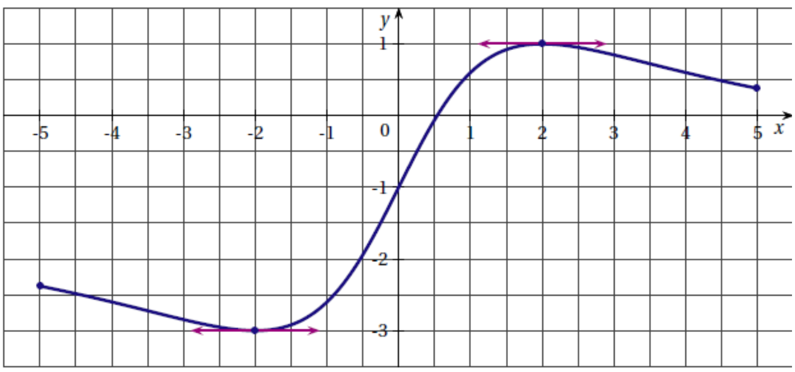
  b. On sait qu'une voiture est âgée de 10 ans.
  Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 15 ans de durée de vie ?

  c. Donner l'expression de la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement.

II/ On considère la représentation graphique ci-dessous d'une fonction f définie est dérivable sur l'intervalle $[-5;5]$.

  1. Déterminer le signe de $f'(1) \times f'(4)$ .justifier votre réponse.

  2. Donner un encadrement entre deux entiers consécutif s le réel $S = \int_1^3 f(x)dx$.



Exercice 1 :

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Soit un entier naturel $n \geq 1$.

1) Calculer $\int_0^n e^{-t}dt$

2) En utilisant une intégration par parties Calculer en fonction de n l'intégrale $u_n = \int_0^n te^{-t}dt$

3) Soit $v_n = \int_0^n t^2e^{-t}dt$

Montrer que $v_n = 2u_n - n^2e^{-n}$: $n \geq 1$

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$

Partie B :

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t dt$,$n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1 par une intégration par partie.

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos t\, dt \quad .$$

3) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$$

b) En déduire I_2 et I_3 . Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2t+t^2-t^3\right)\sin t\, dt$

Exercice 2 :

Partie A

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Étudier le sens de variation de φ et les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α et que l'on a :

$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur □ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^{x+1}}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\ \vec{j}\ )$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x \varphi(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

2. ***a.*** Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$.

b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3. ***a.*** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C .

c. Étudier la position relative de C par rapport à D.

4. ***a.*** Dresser le tableau de variation de f .

b. Tracer sur un même dessin C et D.

Exercice 3 :

Un restaurant propose une formule « entrée + plat » pour laquelle chaque client choisit entre trois entrées (numérotées 1, 2 et 3) puis entre deux plats (numérotés 1 et 2). Chaque client qui choisit cette formule prend une entrée et un plat.

On a constaté que :

30% des clients choisissent l'entrée n° 1, 24% choisissent l'entrée n° 2 et les autres clients choisissent l'entrée n° 3.

Par ailleurs, le plat n° 1 est choisi par : 72% des clients ayant opté pour l'entrée n° 1,58% des clients ayant opté pour l'entrée n° 2 et 29% des clients ayant opté pour l'entrée n° 3.

On choisit au hasard un client du restaurant ayant opté pour la formule « entrée +plat ».

On note $E1$ l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 1 », $E2$ l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 2 » et $E3$ l'évènement : « Le client choisi l'entrée no 3 ».

On note enfin $P1$ l'évènement : « Le client choisi le plat n° 1 » et $P2$ l'évènement : « Le client choisi le plat n° 2 ».

1. Traduire la situation étudiée à l'aide d'un arbre pondéré, en indiquant sur cet arbre les probabilités données dans l'énoncé.

2. Quelle est la probabilité que le client choisisse l'entrée n° 3 et le plat n° 1 (on donnera la valeur exacte de cette probabilité) ?

3. Montrer que la probabilité de l'évènement $P1$ est égale à 0,488 6.

4. Quelle est la probabilité qu'un client ait choisi l'entrée n° 1 sachant qu'il a pris le plat n° 1 (on arrondira le résultat à 10−4 près) ?

5. On choisit trois clients au hasard parmi ceux ayant opté pour la formule ; on suppose le nombre de clients suffisamment grand pour assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise. Dans cette question, on arrondira les résultats au millième.

a) Déterminer la probabilité qu'exactement deux de ces clients aient pris le plat n°1.

b) Déterminer la probabilité qu'au moins un client ait pris le plat n° 1.

6. Ce restaurant fonctionne sans réservation, mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. Ce temps d'attente est une variable aléatoire continue X qui suit une loi exponentielle de paramètre le réel strictement positif $\lambda = 0.05$.

a- Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de cinq minutes ?
b- Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 15 minutes ?

c- un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins

5 minute de plus pour obtenir une table ? on arrondira à 10^{-4} .